Übungen zur Einführung in die Astrophysik II

Musterlösung

Blatt 10 7. Juni 2020

René Reifarth, Tanja Heftrich
Anton Görtz, Enis Lorenz, Dominik Plonka

1. Aus Abbildung 1 des Übungsblattes, ist zu sehen, das sich die Amplitude zwischen den Werten Minimum =2 und Maximum = 9,5 bewegt. Schwankungen den Minimums bzw. des Maximums werden vernachlässigt. Der Zusammenhang zwischen den Magnituden und der Leuchtkraft ist der folgende:

$$M_1 - M_2 = -2,5 \log_{10} \frac{L_1}{L_2} \Rightarrow \frac{L_1}{L_2} = 10^{(M_2 - M_1)/2,5} \tag{1}$$

Mit den aus der Grafik abgelesenen Werten ergibt sich:

$$\frac{L_1}{L_2} = 10^{(9,5-2)/2,5} = 10^3 = 1000$$

Somit schwankt die Leuchtkraft um Faktor 1000. Um den Anteil des Sichbaren Lichtes abzuschätzen nimmt man zunächst eine sinusförmige Verteilung an. Der Mittelwert der Amplitude wird also wie folgt bestimmt:

$$V_{mittel} = \frac{V_{max} - V_{min}}{2} + V_{min} \Rightarrow V_{mittel} = \frac{9,5-2}{2} + 2 = 5,75$$

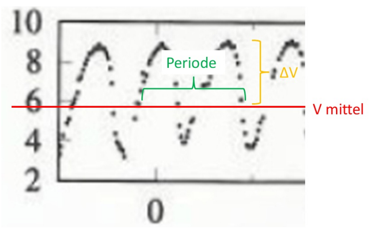

Abbildung 1: Skizze zur Bestimmung der sinusähnlichen Funktion

Eine sinusähliche Funktion hat im Allgemeinen die folgende Form:

$$V(\Theta) = V_{mittel} + \Delta V cos\Theta$$

Wobei $0 \leq \Theta \leq 2\pi$ für eine Periode ist. Ließt man die Werte wie in Abbildung 1 gezeigt ab ergibt sich:

$$V(\Theta) = 5,75 + 3,75 cos\Theta \tag{2}$$

Ein Objekt ist unter idealen bedingungen bei einer Magnitude $V \geq 6$ sichtbar.
Mit Gleichung (2) lässt sich draus cos$\Theta \geq 0,07$ bestimmen.

Die Werte im Bereich von $86° \leq \Theta \leq 274°$, also für 188 von 360 Teilen der Periode, sind nicht sichtbar.

Das bedeutet das 172 von 360 Teile, also etwa 50% von Miras Pulsationszyklusses mit bloßem Auge sichtbar sind.

2. Das Entfernungsmodul bestimmt sich wie folgt:

$$d = 10^{(m-M+5)/5} \tag{3}$$

Analog zu ÜB08 ergibt sich damit für die Ungenauigkeit

$$\frac{\Delta d}{d} = \frac{ln(10)}{5} \cdot \Delta M = 0,23$$

Alternativ lässt sich auch die Ungenauigkeit nach oben, bzw. unten abschätzen:

$$\Delta d = 10^{(m-M+\Delta M+5)/5} - 10^{(m-M+5)/5}$$
$$\frac{\Delta d}{d} = \frac{10^{(m-M+\Delta M+5)/5} - 10^{(m-M+5)/5}}{10^{(m-M+5)/5}}$$
$$\frac{\Delta d}{d} = \frac{10^{(m-M+5)/5} \cdot (10^{\Delta M/5} - 1)}{10^{(m-M+5)/5}} = 10^{\Delta M/5} - 1$$

Für Δ M= 0,5 ergibt sich:

$$\frac{\Delta d^{+}}{d} = 10^{0,5/5} - 1 = 0,26$$

Für Δ M= -0,5 ergibt sich:

$$\frac{\Delta d^{-}}{d} = 10^{-0,5/5} - 1 = -0,20$$

3. Aus der Abbildung wurden die beiden Cepheiden die am Nächsten am Fit liegen mit diesen Werten bestimmt:
   $log_{10}P_1 \cong 1,36$ $V_1 \cong 26,3$ bzw
   $log_{10}P_2 \cong 1,62$ $V_2 \cong 25,5$
   Für einen Cepheiden-Stern der mittleren absoluten Helligkeit M und der Periodendauer p in Tagen gilt:

   $$M = -2{,}81 \cdot \log(p) - 1{,}43$$

   , so das die beiden Cepheiden die folgenden Magnituden haben:
   $M_{V_1} = -5,25$ und
   $M_{V_2} = -5,98$
   Mit Gleichung (3) lässt sich der Abstand d bestimmen:
   $d_{V_1} = 20,4Mpc$ und
   $d_{V_2} = 19,8Mpc$.
   Berücksichtigt man die Fehlerabschätzung aus Aufgabe 2, ergibt sich:
   $d_{V_1} = 20,4 \pm 5Mpc$ und
   $d_{V_2} = 19,8 \pm 5Mpc$.

   Die Werte liegen leicht oberhalb der Daten, die im Originalartikel ermittelt wurden, da hier die Extinktion vernachlässigt wurde.

   Entfernungsmodul mit Extinktion A:

   $$d = 10^{(m-M+5-A_{\nu})/5}$$

   Innerhalb der Fehler stimmen die Abschätzungen jedoch überein.

4. Es gilt

$$\kappa = \frac{\rho}{T^{3,5}} \tag{4}$$

Für $\rho = \frac{m}{V}$ gilt das m konstant ist. Mit der Idealen Gasgleichung

$$p \cdot V = \underbrace{N \cdot k_{\mathrm{B}}}_{const} \cdot T \Rightarrow \frac{pV}{T} = const$$

und

$$p \cdot V^{\gamma} = const \Rightarrow pV \cdot V^{\gamma-1} = const \Rightarrow pV = \frac{const}{V^{\gamma-1}}$$

ergibt sich

$$const = \frac{\frac{const}{V^{\gamma-1}}}{T} \Rightarrow T = const\frac{1}{V^{\gamma-1}} \Rightarrow T^{3,5} = const\frac{1}{V^{(\gamma-1)^{3,5}}}$$

Eingesetzt in (4) ergibt:

$$\kappa = \frac{\frac{const}{V}}{const\frac{1}{V^{(\gamma-1)^{3,5}}}} = const\frac{V^{(\gamma-1)^{3,5}}}{V} = const\frac{V^{(3,5\gamma-3,5)}}{V} = constV^{(3,5\gamma-4,5)}$$

mit $\gamma = \frac{5}{3}$

$$\kappa = constV^{(3,5\frac{5}{3}-4,5)} = V^{\frac{4}{3}}$$

Damit wird die Opazitaet bei adiabatischer Kompression (Volumenabnahe) kleiner.