Übungen zur Einführung in die Astrophysik II

Musterlösung

Blatt 8 7. Juni 2020

René Reifarth, Tanja Heftrich
Anton Görtz, Enis Lorenz, Dominik Plonka

1. Zunächst wird r_R (Das Roche-Limit) mit R_{SL}(Schwarzschild Radius) gleich gesetzt. Wie gefordert wird die Dichte des Schwarzen Loches (ρ_{SL}) wie folgt angenähert:

$$\rho_{SL} = \frac{M_{SL}}{\frac{4}{3}\pi R_{SL}^3} \Rightarrow R_{SL} = \sqrt[3]{\frac{M_{SL}}{\frac{4}{3}\pi \rho_{SL}}} \tag{1}$$

Wobei M_{SL} der Masse des Schwarzen Loches entspricht. Der Schwarzschild Radius kann auch so geschrieben werden:

$$R_{SL} = 2G\frac{M_{SL}}{c^2} \Rightarrow M_{SL} = \frac{R_{SL}c^2}{2G} \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt:

$$M_{SL} = \frac{\sqrt[3]{\frac{M_{SL}}{\frac{4}{3}\pi\rho_{SL}}}c^2}{2G} = \sqrt[3]{\frac{M_{SL}}{\frac{4}{3}\pi\rho_{SL}8G^3}}c^2 = \sqrt[3]{\frac{3M_{SL}}{32\pi\rho_{SL}G^3}}c^2 \tag{3}$$

Wie in der Aufgabenstellung gegeben kann das Roche Limit folgendermassen beschrieben werden:

$$r_R = 2.4\left(\frac{\rho_{SL}}{\rho_{Stern}}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot R_{SL}$$

$$\rho_{SL} = \frac{r_R^3}{R_{SL}^3}\frac{\rho_{Stern}}{2.4^3} \overset{r_R=R_{SL}}{\rightarrow} \frac{\rho_{Stern}}{2.4^3} \tag{4}$$

Einsetzen von (4) in (3) ergibt:

$$M_{SL} = \sqrt[3]{\frac{3M_{SL}}{32\pi\frac{\rho_{Stern}}{2.4^3}G^3}}c^2 \tag{5}$$

Nun muß nur noch der M_{SL} Term aus der Wurzel gezogen werden:

$$M_{SL} = \sqrt[3]{\frac{1.3 M_{SL}}{\pi \rho_{Stern} G^3} c^2} \xrightarrow{3} M_{SL}^3 = \frac{1.3 M_{SL}}{\pi \rho_{Stern} G^3} c^6 \xrightarrow{\div M_{SL}} M_{SL}^2 = \frac{1.3}{\pi \rho_{Stern} G^3} c^6 \xrightarrow{\surd}$$

$$M_{SL} = \sqrt{\frac{1.3}{\pi \rho_{Stern} G^3} c^6}$$

Setzt man die Konstanten ein ergibt sich:

$$M_{SL} = 1.6 \cdot 10^{10} \frac{1}{\sqrt{\rho_{Stern}}} M_{\odot} \tag{6}$$

Wobei $M_{\odot}$ die Sonnenmasse ist.

2. Die Dichte der Sonne ist 1410 kg/m^3 Diesen Wert in Gleichung (6) eingesetzt ergibt:

   $$M_{SL} = 4.3 \cdot 10^8 M_{\odot}$$

   Die Masse von supermassiven Schwarzen Löchern liegt zwischen $10^5 - 10^9 M_{\odot}$ und damit ist das Szenario der „zerreißenden Sonne“ durchaus möglich.

3. In dem Fall eines supermassiven Schwarzen Loches dessen Masse größer ist als $4.3 \cdot 10^8 M_{\odot}$ würde der Stern nicht zerissen werden, da sich der Ereignishorizont außerhalb der Roche Grenze befindet. Die Gravitationsenergie liegt in der Größenordnung von:

   $$E_{\mathrm{G}} \sim \frac{GM^2}{R}$$

   wobei diese Energie nur dann effektiv in Strahlung umgewandelt wird, wenn der Stern zerrissen wird und sich eine Akkretionsscheibe ausbildet. Die Sonne würde schlicht immer röter werden und irgendwann nicht mehr sichtbar sein. Das eigentliche Eintauchen hinter den Ereignishorizont läßt sich in endlicher zeit nicht beobachten, da unsere Zeit zunehmend schneller vergeht als die Zeit der eintauchenden Sonne.