Übungen zur Einführung in die Astrophysik II

Musterlösung

Blatt 5 — 1. Mai 2020

René Reifarth, Tanja Heftrich
Anton Görtz, Enis Lorenz, Dominik Plonka

1. Für die Umlaufzeit T der Sonne um das galaktische Zentrum folgt mit $v_{Sonne} = 2,2 \cdot 10^5$ m/s und $R = 8$ kpc=$2,4 \cdot 10^{20}$ m:
   $T = \frac{2\pi R}{v_{Sonne}} = 6,85 \cdot 10^{15}$ s $\approx 2,2 \cdot 10^8$ a
   Bei einem Alter von ca. $4,6 \cdot 10^9$ a reicht das für ca. 20 Umrundungen.

2. Die stellare Massendichte in der Nähe der Sonne ist etwa 0,05 $M_\odot$ pc^{-3}. Nehmen Sie an, ein mittlerer Stern habe eine Masse von 0,51 $M_\odot$ und einen Radius von 0,63 $R_\odot$.

   (a) Wir suchen das Verhältnis der Volumina zueinander: $\frac{V_{Stern}}{V_{Galaxie}}$.
   Der Stern sei kugelförmig, das Volumen ergibt sich dann mit: $V_{Kugel} = \frac{4}{3}\pi R^3$ mit dem gegebenen Radius aus der Aufgaben.
   Das Volumen der Galaxie schätzen wir mit der stellaren Massendichte ρ und der Masse eines mittleren Sternes ab mit: $V_{Galaxie} = \frac{M}{\rho}$
   Eingesetzt folgt dann mit den Werten aus der Aufgabe:

   $$\frac{V_{Stern}}{V_{Galaxie}} = \frac{\rho V_{Stern}}{M} = \frac{0,05 \cdot 4\pi \cdot 0,63^3}{3 \cdot 0,51} \cdot \left(\frac{R_\odot}{pc}\right)^3 = 1,2 \cdot 10^{-24} \quad (1)$$

   (b) Analog zu a) mit den Größen $r_{Atom} = 10^{-10}$ m und $r_{Kern} = 10^{-15}$ m und der Annahme, dass beide kugelförmig sind:

   $$\frac{V_{Kern}}{V_{Atom}} = \left(\frac{r_{Atom}}{r_{Kern}}\right)^3 = 10^{-15} \quad (2)$$

   Das Weltall ist also um Größenordnungen 'leerer' als ein Wasserstoffatom!

(c) ür die Wahrscheinlichkeit p eines Stoßes Stern-Stern gehen wir davon aus, dass sich die beiden Sterne wie beim Billard direkt treffen müssen. Der Wirkungsquerschnitt σ beschreibt dann die Fläche, auf der die beiden Sterne sich gerade noch berühren. Dies ist ein Kreis mit:

$$\sigma = \pi(2R_{Stern})^2 = \pi(2 \cdot 0,63\, R_{\odot})^2 = 2,4 \cdot 10^{18}\mathrm{m}^2 = 2,5 \cdot 10^{-15}\mathrm{pc}^2 \quad (3)$$

Der Stern fliegt durch die Scheibe mit einer Dicke $d = 1000$ pc. Dabei ist die Sternendichte in der Galaxie $n_{Sterne} = \frac{\rho}{M}$, da er ja nur "ganze" Sterne trifft. Eingesetzt ergibt sich dann für p:

$$p = \sigma d n_{sterne} = 2,5 \cdot 10^{-15}\mathrm{pc}^2 \cdot \frac{0,05}{0,51}\,\mathrm{pc}^{-3} \cdot 1000\,\mathrm{pc} = 2,5 \cdot 10^{-13} \quad (4)$$

Dies ist eine sehr geringe Wahrscheinlichkeit, d.h. der Stern fliegt meist ohne direkten Stoß direkt durch die Galaxie.

3. Geschwindigkeitsprofil der Milchstrasse.

(a) Aus dem Diagramm liest man im Abstand von $R = 8$ kpc eine Rotationsgeschwindigkeit von etwa $v_s = 215$km/s ab. Die Sonne soll eine Kreisbahn um das Zentrum beschreiben. Damit ergibt sich für die Umlaufzeit:

$$T = \frac{U}{v_{\odot}} = \frac{2\pi \cdot R}{v_{\odot}} = 7,21 \cdot 10^{15}\ \mathrm{s} = 2,29 \cdot 10^{8}\ \mathrm{a} \quad (5)$$

(b) Zur Abschätzung der Masse der Milchstraße M_G innerhalb unserer Umlaufbahn nehmen wir an, dass allein die Gravitationskraft die Sonne auf einer stabilen Kreisbahn hält:

$$\frac{M_{\odot} * v_s^2}{R} = \frac{G * M_{\odot}}{R^2} * M_G \quad (6)$$

und somit

$$M_G = \frac{R v_s^2}{G} \approx 1,9 * 10^{41}\ \mathrm{kg} = 9,58 * 10^{10} M_{\odot} \quad (7)$$

Als Literaturwert findet man für die Masse der Milchstraße $M_{G,Literatur} = 3,6 * 10^{41}$ kg.

(c) Unter der gleichen Annahme wie unter b) formt man nach v um:

$$v = \sqrt{\frac{GM_G}{r}} \tag{8}$$

Die Fluchtgeschwindigkeit ist also nur von r abhängig und wird für größere r immer kleiner. Dies stimmt aber nicht mit den Beobachtungen überein!

Die Masseverteilung muss also anders sein.

(d) Durch das Kräftegleichgewicht aus b) und c) wissen wir, dass folgender Zusammenhang für konstante Geschwindigkeiten in beiden Fällen gelten muss:

$$M_G = C * r \tag{9}$$

mit C=konstant

Für die Berechnung der Masse durch Integration gilt in Polar- bzw. Kugelkoordinaten:
Scheibengalaxie: $M_G = \int_0^r 2\pi h r \rho(r) \mathrm{d}r$ mit h: Höhe der Scheibe
Kugelgalaxie: $M_G = \int_0^r 4\pi r^2 \rho(r) \mathrm{d}r$
Vergleicht man die beiden Formeln sieht man, dass die Dichte das vorhandene r bzw. r^2 wegkürzen muss, damit nach der Integration M_G nur von r abhängt. Deshalb muss gelten:
Scheibengalaxie: $\rho(r) \propto \frac{1}{r}$

Kugelgalaxie: $\rho(r) \propto \frac{1}{r^2}$