

Übungen zur Einführung in die Astrophysik II

Musterlösung

Blatt 4

1. Mai 2020

René Reifarh, Tanja Heftrich
Anton Görtz, Enis Lorenz, Dominik Plonka

1. Eine Abschätzung für die Chandrasekhar Masse wird mit

$$M_{Ch} \propto \left[\left(\frac{Z}{A} \right) \frac{1}{m_H} \right]^2 \quad (1)$$

gegeben. Hierbei ist A die mittlere Massenzahl und Z die mittlere Ladungszahl der Atome. m_H ist die Protonenmasse.

- (a) Das Verhältnis $\frac{Z}{Am_H}$ entspricht dem Verhältnis $\frac{N_{Elektronen}}{M}$, also dem Verhältnis der Elektronenzahl zur Gesamtmasse.

Die Elektronen stabilisieren den Stern, der entsprechende Druck heißt Entartungsdruck. Eine größere Anzahl von Elektronen resultiert deshalb in einer größeren Chandrasekhar Masse. Man kann sich diesen Zusammenhang mit dem Pauli-Prinzip plausibel machen.

Das Produkt aus Nukleonenzahl und Protonenmasse (=Masse eines Nukleons) ist die Gesamtmasse (Elektronen vernachlässigbar). Die Gesamtmasse ist proportional zum Gravitationsdruck und wirkt dem Entartungsdruck entgegen, verringert als die Grenzmasse.

- (b) Im Inneren des weißen Zwerges ist ein C/O Kern. Das Verhältnis $\frac{Z}{A}$ liegt bei Kohlenstoff C_6^{12} bei 0,5. Im Sauerstoff ist es auch so.

Der Eisenkern (wie er zum Beispiel nach einer Supernova übrigbleibt) hat ein $\frac{Z}{A}$ Verhältnis etwa 0,46 da Fe_{26}^{56} das stabile, am häufigsten vorkommende Isotop ist.

Im Rahmen der Näherungen kann man davon ausgehen, dass die Grenzmassen ähnlich sind.

2. Das Tröpfchenmodell sagt folgende Dichte für einen Kern voraus:

$$\rho = \frac{Am_H}{\frac{4}{3}\pi r^3} \quad (2)$$

Setzt man für r die gegebene Formel für den Radius ein:

$$\rho = \frac{Am_H}{\frac{4}{3}\pi(r_0 A^{1/3})^3} = \frac{3m_H}{4\pi r_0^3} = 2,3 \cdot 10^{17} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad (3)$$

3.

$$\rho = \frac{Am_H}{\frac{4}{3}\pi r^3} \Leftrightarrow r = \left(\frac{3Am_H}{4\pi\rho} \right)^{1/3} \quad (4)$$

Am_H entspricht der Masse des Objektes, also in diesem Fall der Masse des Mondes, die $7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$ ist. Als Dichte soll die Dichte des Neutronensterns angenommen werden. Diese liegt bei $6,65 \cdot 10^{17} \text{ kg/m}^3$.

$$r = \left(\frac{3 \cdot 7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}}{4\pi \cdot 6,65 \cdot 10^{17} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} \right)^{1/3} = 30 \text{ m} \quad (5)$$

4. Es ist auch möglich die beiden Kräfte getrennt auszurechnen, und dann ein Verhältnis zu bilden. Verglichen zum Gesamtradius ist der Unterschied von 1 cm jedoch sehr klein. Deshalb kann eine Reihenentwicklung vorgenommen werden.

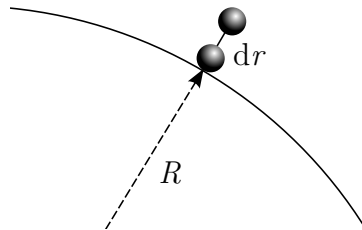


Abbildung 1: Skizze zu Aufgabe 4

Die beiden Massen werden mit u für die untere Masse und o für die obere Masse indiziert.

$$\frac{F_u}{F_o} = \frac{F(R)}{F(R+dr)} \cong \frac{F(R)}{F(R) + \left[\left(\frac{dF}{dr}\right)|_R\right]} = \left[1 + \frac{1}{F(R)} \frac{dF}{dr} \Big|_R\right]^{-1} \quad (6)$$

Das Gravitationsgesetz in differentieller Form ist gegeben mit

$$\frac{dF}{dr} = -2\gamma \frac{Mm}{r^3} \quad (7)$$

und wird in Gleichung (6) eingesetzt:

$$\frac{F_u}{F_o} \cong \left[1 - \frac{R^2}{GMm} \frac{2GMm}{R^3} dr\right]^{-1} = \left(1 - \frac{2dr}{R}\right)^{-1} \quad (8)$$

In der Aufgabe war R mit 10^4 m und r mit 0,01 m gegeben. Für das Verhältnis der beiden Kräfte ergibt sich somit:

$$\frac{F_u}{F_o} \cong 1,000002 \quad (9)$$

5. Zunächst muß man die Masse des Eisenwürfels berechnen.

$$m = V \cdot \rho = 1 \text{ cm}^3 \cdot 7,9 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 7,9 \text{ g} = 0,0079 \text{ kg} \quad (10)$$

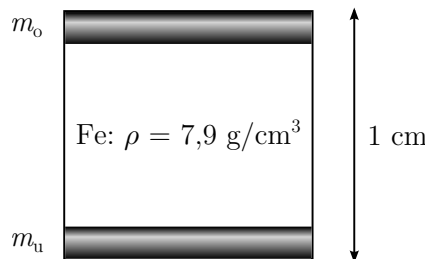


Abbildung 2: Skizze Aufgabe 5

Die Kraft die den Würfel auseinanderzieht ($F_{Verformung} = F_v$) ist die Differenz zwischen der Kraft auf die obere Massenhälfte und der auf die untere Massenhälfte. Für die Zugspannung E_v (Kraft über der Querschnittsfläche des Würfels) gilt demnach:

$$E_v = \frac{F_v}{A} = \frac{F_u - F_o}{10^{-4} \text{ m}^2} \cong \frac{F_u}{10^{-4} \text{ m}^2} \left(1 - \frac{F_o}{F_u}\right) \quad (11)$$

Wie in Aufgabe 4 kann nun das Gravitationsgesetz eingesetzt und vereinfacht werden.

$$= G \frac{Mm}{R^2} \frac{1}{10^{-4}\text{m}^2} \left(1 - \left(1 - \frac{2dr}{R} \right) \right) = \frac{2GMm dr}{10^{-4}\text{m}^2 R^3} \quad (12)$$

Dies ergibt mit den gegebenen Werten eine Zugspannung von $1,46 \cdot 10^8 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$. Der Würfel wird also extrem verformt.

Im Fallen bewirkt die Verformung eine Vergrößerung von dr und somit ein sehr baldiges Überschreiten der Grenzspannung zum Zerreiß von $1,5 \cdot 10^8 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$.

Ein Eisenmeteorit würde zunächst in die Länge gezogen und letztendlich vom dem Stern zugewandten Ende anfangend in seine Eisenatome zerrissen werden. Die Oberfläche des Neutronensterns wird dann Atom für Atom erreicht.