Übungen zur Einführung in die Astrophysik II

Musterlösung

Blatt 3

René Reifarth, Tanja Heftrich
Anton Görtz, Enis Lorenz, Dominik Plonka

1. Massenverlust

   (a) Es gilt:

   - Je größer die Leuchtkraft L ist, desto der Strahlungsdruck bzw. die Anzahl der Photonen, die pro Zeiteinheit mit den äußeren Schichten wechselwirken.
   - Je kleiner die Oberflächenfallbeschleunigung g ist, desto leichter kann Materie an der Oberfläche dem gravitativen Einfluss des Sterns entkommen.
   - Je kleiner der Radius R ist, desto kleiner ist die Oberfläche des Sterns. Bei konstanter Masse müssen die Photonen daher beim Verlassen des Sterns deshalb mehr Atome/Fläche passieren. Da die Leuchtkraft L und daher die Anzahl der Photonen pro Zeit konstant sind, werden mehr Atome der Hülle durch die WW mit den Photonen nach außen beschleunigt und können ggf. entkommen.

   Dies sorgt jeweils dafür, dass der Stern mehr Masse pro Zeit verliert.

   (b) Die fehlende Größe der relativen Oberflächenfallbeschleunigung g erhält man aus dem Gravitationsgesetz und durch Einsetzen der gegebenen Werte für M und R:

$$g_{Stern} = \frac{GM}{R^2} = \frac{GM_\odot}{(310R_\odot)^2} = \frac{g_\odot}{310^2} \tag{1}$$

$$\frac{g_{Stern}}{g_\odot} = \frac{1}{320^2} \tag{2}$$

Durch Einsetzen der relativen Werte erhält man

$$\frac{dM}{dt} = -4{\cdot}10^{-13}\frac{7000}{\frac{1}{310^2}\cdot 310}\cdot\frac{M_\odot}{\text{yr}} = -8,7{\cdot}10^{-7}\frac{M_\odot}{yr} = -1,74{\cdot}10^{24}\frac{\text{kg}}{\text{yr}} \tag{3}$$

2. (a) Durch Vergleich der beiden Formeln sieht man, dass gelten muss:

$$\frac{1}{gR} = \frac{R}{M} \tag{4}$$

Durch Ersetzen der relativen Werte für g und R und der Definition für g aus 1.b) erhält man:

$$\frac{1}{gR} = \frac{R_\odot g_\odot}{R_{Stern}g_{Stern}} = \frac{R_\odot GM_\odot (R_{Stern})^2}{R_{Stern}GM_{Stern}(R_\odot)^2} = \frac{M_\odot R_{Stern}}{R_\odot M_{Stern}} = \frac{R}{M} \tag{5}$$

(b) Durch Trennung der Variablen M und t kann man die Gleichung integrieren und nach M auflösen. Zur Vereinfachung kann man die Konstanten substituieren: $C = -4 * 10^{-13}LR\frac{M_\odot}{\text{yr}}$

$$\int_{M_0}^{M(t)} MdM = C\int_0^t \mathrm{d}t \tag{6}$$

$$\frac{1}{2}[M(t)^2 - (M_0)^2] = C * t \tag{7}$$

$$M(t) = [(M_0)^2 - 8 * 10^{-13}LRt\frac{M_\odot}{yr}]^{\frac{1}{2}} \tag{8}$$

(c)

(d) Um die Zeit zu ermitteln, in der der Stern seine Hülle abgeworfen hat, formt man die Formel aus b) nach der Zeit um und setzt die relativen Werte für L und R ein, sowie $M(t) = 0,6$ und $M_0 = 1$:

$$t = \frac{(M_0)^2 - M(t)^2}{8LR} * 10^{13}\ \text{yr} = 3,69 * 10^5\ \text{yr} \tag{9}$$

3. Umfang eines Kreisrings unter Winkel ϑ und Abstand R vom Mittelpunkt:

$$2\pi R\sin\vartheta$$

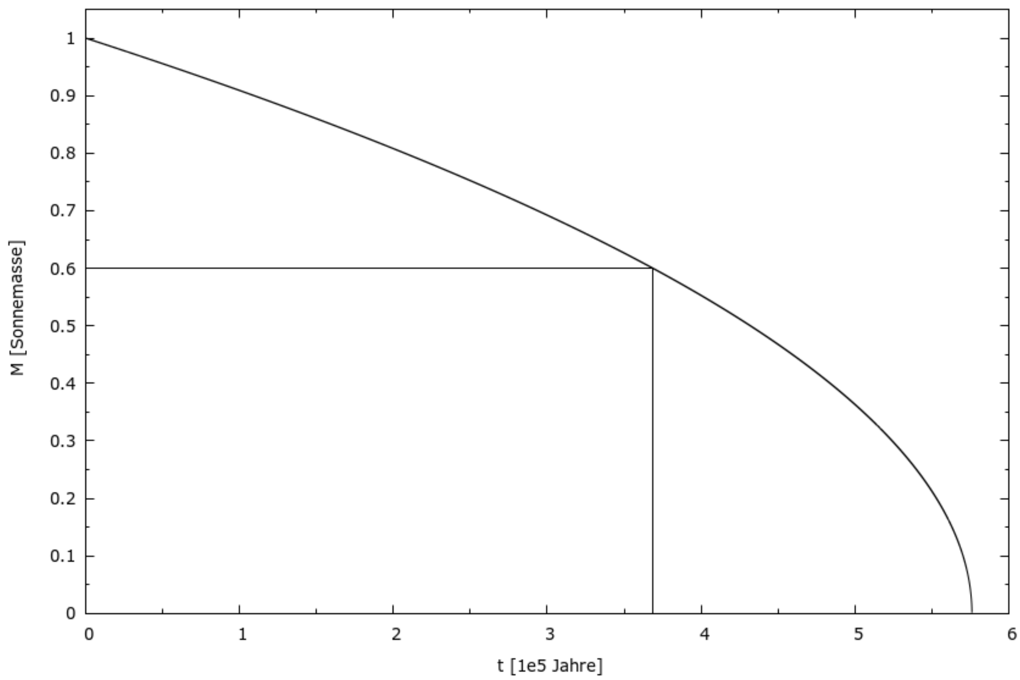

Abbildung 1: Massenverlust

Breite des Kreisrings entlang der Oberfläche:

$$R\mathrm{d}\vartheta$$

Wegen der konstanten Dichte ρ der Kugelschale lässt sich der Massenanteil $\mathrm{d}M$ darstellen als:

$$\mathrm{d}M = \rho \mathrm{d}V = \rho 2\pi R^2 \sin\vartheta \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}R \tag{10}$$

Man kann das Koordinatensystem so legen, dass die z-Komponente entlang der Verbindungslinie r zwischen Kugelmittelpunkt und Probemasse m liegt. Die x- und y-Komponenten der Gravitationskraft gleichen sich aus Symmetriegründen aus, so dass nur die z-Komponente betrachtet werden braucht.

Damit gilt für die resultierende Kraft $F = F_z$ zwischen Probemasse m und Kreisring $\mathrm{d}M$:

$$\mathrm{d}F = \frac{Gm\mathrm{d}M}{s^2}\cos\phi \tag{11}$$

Die gesamte auf m wirkende Kraft lässt sich dann mit (10) und (11) als Integral über alle Kreisringe, also über ϑ und R, darstellen:

$$F = 2\pi G\rho m \int\limits_{r_1}^{r_2} R^2 \mathrm{d}R \int\limits_0^{\pi} \frac{1}{s^2} \cos\phi \sin\vartheta \mathrm{d}\vartheta \tag{12}$$

Zum Ausrechnen dieses Integrals müssen der Abstand s zwischen Probemasse und Kreisring und der Außenwinkel ϕ durch den Innenwinkel ϑ dargestellt werden.

Mit dem Kosinussatz ergibt sich damit:

$$s^2 = r^2 + R^2 - 2rR\cos\vartheta$$

was sich ableiten lässt zu

$$\begin{aligned} 2s\mathrm{d}s &= 2rR\sin\vartheta\mathrm{d}\vartheta \\ \sin\vartheta\mathrm{d}\vartheta &= \frac{s\mathrm{d}s}{Rr} \end{aligned}$$

Der Kosinussatz angewandt auf den Außenwinkel ϕ führt zu

$$\begin{aligned} R^2 &= s^2 + r^2 - 2sr\cos\phi \\ \cos\phi &= \frac{s^2 + r^2 - R^2}{2sr} \end{aligned}$$

Nun können wir das obige Integral (12) nur in Abhängigkeit von s darstellen. Für die Integrationsgrenzen gilt dabei:

Der Abstand der Probemasse bis zum ihr am nächsten gelegenen Punkt auf der Kugelschale

$$s(\vartheta = 0) = r - R$$

und der Abstand der Probemasse bis zum von ihr am weitesten entfernten Punkt auf der Kugelschale

$$s(\vartheta = \pi) = r + R$$

$$
\begin{aligned}
F &= 2\pi G\rho m \int\limits_{r_1}^{r_2} R^2 \mathrm{d}R \int\limits_{s=r-R}^{s=r+R} \frac{1}{s^2} \frac{r^2+s^2-R^2}{2rs} \frac{s\mathrm{d}s}{Rr} \\
&= \pi G\rho m \frac{1}{r^2} \int\limits_{r_1}^{r_2} R\mathrm{d}R \int\limits_{s=r-R}^{s=r+R} \left(1 + \frac{r^2-R^2}{s^2}\right) \mathrm{d}s \\
&= \pi G\rho m \frac{1}{r^2} \int\limits_{r_1}^{r_2} R\mathrm{d}R \left[s - \frac{r^2-R^2}{s}\right]_{s=r-R}^{s=r+R} \\
&= \pi G\rho m \frac{1}{r^2} \int\limits_{r_1}^{r_2} R\mathrm{d}R \left[(r+R) - \frac{r^2-R^2}{r+R} - (r-R) + \frac{r^2-R^2}{r-R}\right] \\
&= \pi G\rho m \frac{1}{r^2} \int\limits_{r_1}^{r_2} R\mathrm{d}R \left[2R - (r-R) + (r+R)\right] \\
&= \pi G\rho m \frac{1}{r^2} \int\limits_{r_1}^{r_2} 4R^2 \mathrm{d}R \\
&= \pi G\rho m \frac{1}{r^2} \frac{4}{3} \left(r_2^3 - r_1^3\right)
\end{aligned}
$$

Einsetzen der homogenen Dichte der Kugelschale

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi \left(r_2^3 - r_1^3\right)}$$

führt zu

$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$