Übungen zur Einführung in die Astrophysik II

Musterlösung

Blatt 2 1. Mai 2020

René Reifarth, Tanja Heftrich
Anton Görtz, Enis Lorenz, Dominik Plonka

Aufgabe 1
Für die Leuchtkraft L eines kugelförmigen schwarzen Strahlers gilt:
$L = \sigma_{SB} T^4 \cdot 4\pi r^2$ mit r: Radius der Kugel, T: Temperatur und σ_{SB}: Stefan-Boltzmann-Konstante.
Die abgestrahlte Energie im Abstand R vom kugelförmigen Stern ist gleichmäßig über eine Kugeloberfläche mit Radius R verteilt.
Um die vom Staubkorn im Abstand d pro Zeit aufgenommene Energie zu berechnen, brauchen wir das Flächenverhältnis vom Staubkorn zur Oberfläche der Kugel mit Radius d:

$P_{abs} = L_\star \cdot \frac{\pi r_s^2}{4\pi d^2}$

Die absorbierte Energie pro Zeit ist gleich der vom Staubkorn emittierten Leuchtkraft $P_{abs} = L_{emitt}$. Durch Einsetzen erhält man:

$\sigma_{SB} T_\star^4 \cdot 4\pi R_\star^2 \cdot \frac{r_s^2}{4d^2} = \sigma_{SB} T_s^4 \cdot 4\pi r_s^2$ => $T_s = \sqrt{\frac{R_\star}{2d}} \cdot T_\star$

Mit $R_\star = 1,4 R_\odot$, $T_\star = 7600$ K und $d = 100$ AE eingesetzt, folgt: $T_S \approx 43$ K

Aufgabe 2
Bei gegebener Wellenlänge λ oder alternativ gegebener Frequenz ν (Umrechnung ineinander ist mit $c = \lambda\nu$ möglich) ist die Energie eines Photons gegeben durch:

$E_{Ph} = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$

Die Energie eines Photons mit $\lambda = 21$ cm ergibt sich somit zu:
$E_{Ph} = 9,46 \cdot 10^{-25}$ J.

Diese Energie muss für den Spinflip durch thermische Anregung in den interstellaren Wolken zur Verfügung gestellt werden:

$E_{Ph} = k_B T$ => $T = \frac{E_{Ph}}{k_B} = 0,069$ K

Da die Wolken eine Temperatur von $10 - 100$ K haben, reicht dies also aus, um den Spinflip zu ermöglichen.
Der Nachweis einer 21-cm Linie im Spektrum zeigt also die Existenz von neutralem Wasserstoff an.

Aufgabe 3
a) Für das Trägheitsmoment I gilt: $I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$
Wir rechnen im Schwerpunktssystem, in dem gilt:

I. $r = r_1 + r_2$ und II. $m_1 r_1 = m_2 r_2$

Durch Auflösen von I. nach r_1 bzw. r_2 und Einsetzen in II. erhält man:

$r_1 = \frac{m_2 r}{m_1+m_2}$ und $r_2 = \frac{m_1 r}{m_1+m_2}$

Mit Einsetzen für das Trägheitsmoment folgt:

$I = m_1(\frac{m_2 r}{m_1+m_2})^2 + m_2(\frac{m_1 r}{m_1+m_2})^2 = \frac{m_1 m_2 r^2 (m_1+m_2)}{(m_1+m_2)^2} = \mu r^2$ mit der reduzierten Masse $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$

b) Mit der Umrechnung von u in kg durch 1 u=1,66·10^{-27} kg und Einsetzen der jeweiligen Massen von ^{12}CO und ^{13}CO und dem Abstand $r = 0,12$ nm=1,2·10^{-11} m in die Formel aus a) folgt:

$I_{12} = 1,64 \cdot 10^{-46}$ kg m^2 und $I_{13} = 1,71 \cdot 10^{-46}$ kg m^2

c) Für die Energie einer Rotation gilt: $E_{rot} = \frac{L^2}{2I}$. Da die Änderung des Drehimpulses von $l = 3$ nach $l = 2$ quantenmechanisch gerechnet werden muss, brauchen wir die Eigenwerte des Drehimpulsoperators $L^2 = \hbar^2 l(l+1)$, die die möglichen Messwerte angeben. Für die Energiedifferenz gilt dann:

$\Delta E_{12} = E_3 - E_2 = \frac{6\hbar^2}{I_{12}} - \frac{3\hbar^2}{I_{12}} = \frac{3\hbar^2}{I_{12}} = 2,03 \cdot 10^{-22}$ J

Daraus ergibt sich mit $\lambda = \frac{hc}{E}$ eine Wellenlänge von $\lambda_{12} = 9,77 \cdot 10^{-4}$ m. Dies ist im Infrarotbereich.

d) Analog zu c) folgt für I_{13}: $\Delta E_{13} = 1,95 \cdot 10^{-22}$ J und $\lambda_{13} = 1,02 \cdot 10^{-3}$ m. Die Differenz von $0,043$ mm ist zwar sehr gering, reicht aber aus, um verschiedene Isotope im Spektrum zu unterscheiden.